**2.1 定义和例子** 2021年1月26日10点07分

**定义2.1.1** **拓扑空间**是一对对象,其中是集合,是X子集的集合并满足以下条件:

1. ;
2. 如果,则;
3. 如果,则.

集合被称为上的拓扑,集合中的集合被称为开集[open sets].

**定义2.1.3** 令是一个拓扑空间,如果对于中的任意一对不相同点,总是存在不相交集合U,V使得且,则

不难发现,平凡的拓扑空间不是Hausdorff空间,但是每一个度量空间都是Hausdorff.实际上,如果是一个度量空间,对于,且,则.非Hausdorff的拓扑空间在数学的某些部分自然而然地出现.但是,大多数数学家不会经常遇到他们.分析师永远不会.当一个空间不能成为Hausdorff时,就会出现病理.因此,我们将避免它们,并达成以下协议.

**协议** *本书中遇到的所有拓扑空间都将假定为Hausdorff*.

读者可能已经想到了这个定义:如果,则的子集是**闭集**.同样,我们直接从度量空间获得了定义.

**命题2.1.4** 令为拓扑空间,令表示的封闭子集的集合.

1. ;
2. 如果,则;
3. 如果,则;
4. 对于每一个.

**定义2.1.5** 令为拓扑空间,令为的子集.以表示的的**内部**,定义为.由表示的的**闭包**,定义为定义的集合.A的**边界**标记为,定义为.

**命题2.1.6** 令为拓扑空间,并假设.

1. 当且仅当存在一个开集G使得.
2. 当且仅当对于每一个包含的开集G,我们有.
3. 是被A包含的最大开集.
4. 是包含A的最小闭集.

**命题2.1.7** 令为拓扑空间,令为的子集.

1. A是闭集当且仅当.
2. A是开集当且仅当.
3. 如果是X的子集,则.

**定义2.1.8** 如果,则拓扑空间的子集是**密集的**.如果拓扑空间具有可数的密集子集,则拓扑空间是可**分离的**.

**命题2.1.9** 中的一个集合是密集的当且仅当对于中的每一个以及包含的每一个开集,我们有.

**定义2.1.10** 如果,则中的点称为的**极限点**,即对于每个包含的开放集,存在与都不相同的点.换句话说,.

我们可以定义拓扑空间中收敛序列的概念,如下所示:在中当且仅当每个包含x的开放集G都存在一个N,使得当时.但是,这仅具有边际价值.例如,在此更通用的设置中,命题1.2.7中给出的极限点的顺序表征是不正确的.稍后,我们将概括一个序列的概念,这将证明它在度量空间中序列具有的拓扑空间中具有效用.现在,我们想将命题1.2.7扩展到一个拓扑空间,但是我们需要提供一个证明,因为在度量空间设置中为此结果给出的证明依赖于序列.拓扑空间中的一个方便术语是点x的邻域,它是包含x的开放集G.(通过x的邻域,一些作者表示在内部包含x的集合E.这具有价值和便利性,但是我们将坚持在此注释之前给出的定义.)

**命题2.1.11** 设A为X的子集.

1. 集合是闭集当且仅当包含其所有极限点.
2. .

**命题2.1.12** 令为拓扑空间,令为的子集,并为赋予其子空间拓扑.

1. 的子集是闭集当且仅当存在一个闭集F使得.
2. 如果,则表示中的闭包,而表示中的闭包,则.
3. 如果,则表示中的内部,而表示X中A的内部,则.

**定义2.1.13** 令为拓扑空间,如果在X上定义了一个度量使得由该度量定义的开集合是的精确集,则称是**可度量化[metrizable]**.

2.2 拓扑基和子基 2021年1月27日11点09分

定义2.2.1 如果是一个集合,则如果中的每个集合是由集合中一组子集的并集构成,则的子集的集合是拓扑的基.

命题2.2.3 如果是上拓扑的基,则满足以下条件:

;

如果且,则存在一个使得;

如果x和y是X中的不同点,则存在集合A,B使得当时,.

相反,如果是满足这三个条件的X子集的集合,则是上唯一的Hausdorff拓扑的基.

结论2.2.4 如果是可分离的,则是的密集子集,而是开放单位区间中有理数的枚举,则是上拓扑的基.

推论2.2.5 令为任意集合的子集的任何组合,使得:

;

对于X中任意一对不同点x,y,存在两个不相交集合S,T使得且.

如果B包含S中所有有限的交集,则B是拓扑基.

定义2.2.6 如果S是前面推论中具有属性（a）和（b）的任意集合X的子集的任何集合，则S称为子库。 来自S的所有有限交集的集合B称为S生成的基（请参见前面的推论）。 该基础定义的拓扑称为S生成的拓扑。